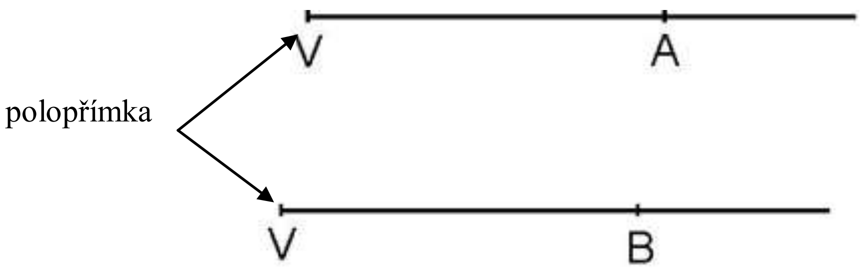
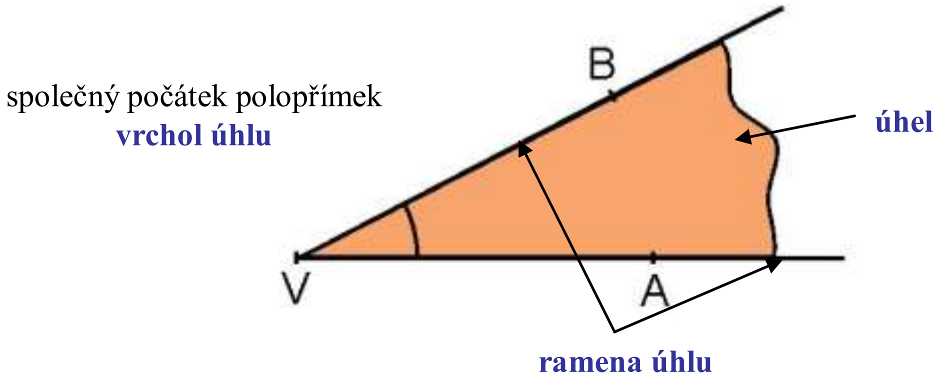
6. Úhel a jeho vlastnosti

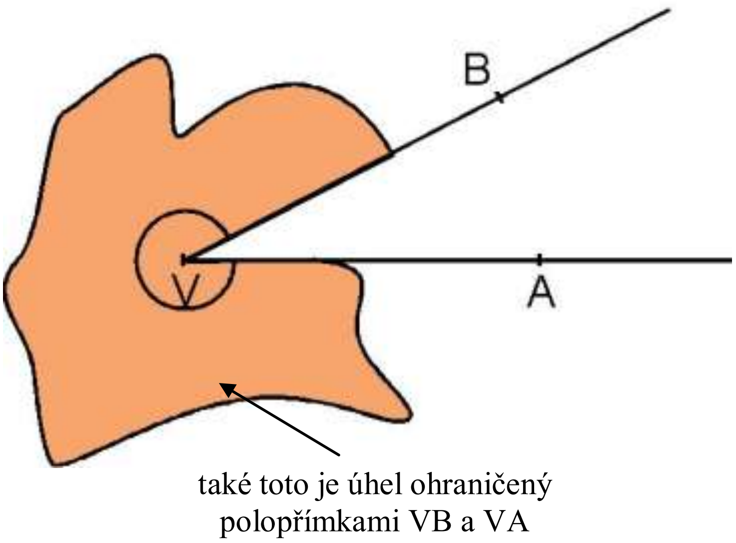
6.1 Úhel, osa úhlu

6.1.1 Úhel

Úhel je část roviny ohraničená **dvěma polopřímkami** se **společným počátkem**. Polopřímkám říkáme **ramena úhlu**. Jejich společný počátek nazýváme **vrchol úhlu**.





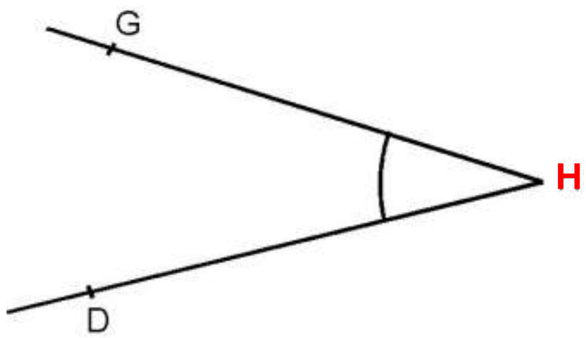


První úhel zapisujeme : ∠ AVB

Druhý úhel zapisujeme : ∢ AVB

Pozor!!! - prostřední písmeno označuje vždy vrchol úhlu

Příklad: ∠GHD

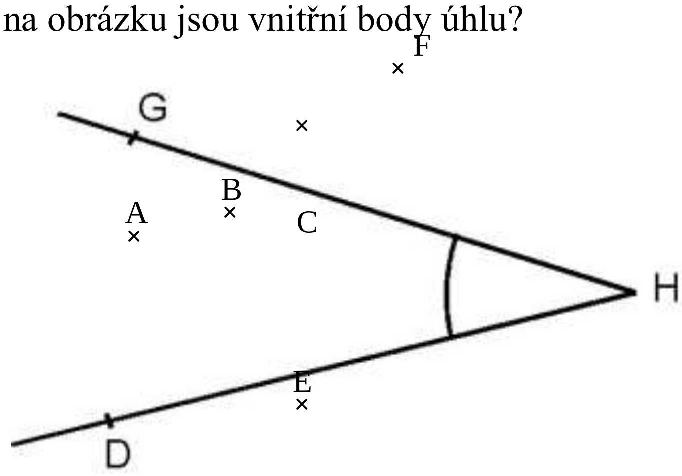


Pro označení úhlů často používáme řecká písmena **α**(alfa), **β**(beta), **γ**(gama), **δ**(delta), **ε**(epsilon), **φ**(fí), **ω**(omega)...

Například úhel ∠GHD můžeme zapsat i jako úhel β.
Pozor!!! značky pro úhel se před řecká písmena nedávají

6.1.2. Vnitřní a vnější bod úhlu

Bod, který náleží úhlu, ale neleží na jeho ramenech se nazývá **vnitřní bod úhlu**.
Příklad : Které z bodů na obrázku jsou vnitřní body úhlu?



Máte nějaké kritické připomínky k tomuto obrázku ?
Řešení : jsou to pouze body A, B
Ano, označení bodu C; písmeno E je přeťato polopřímkou HD

6.1.3. Osa úhlu

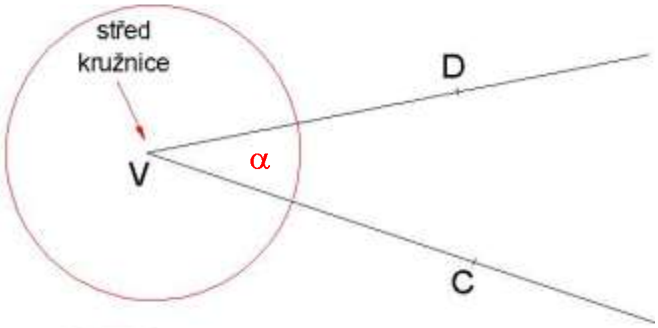
Osa úhlu je přímka, která **rozděluje** úhel na **dva shodné úhly.**

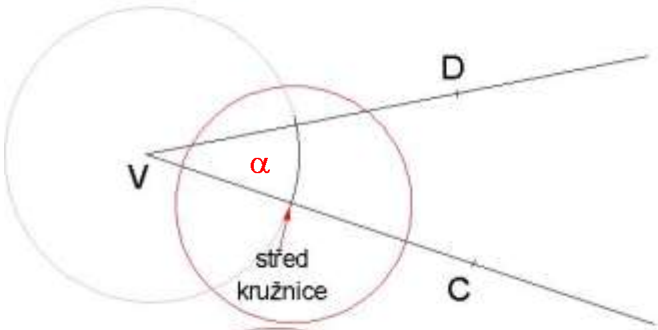
Příklad : Sestrojte osu úhlu.

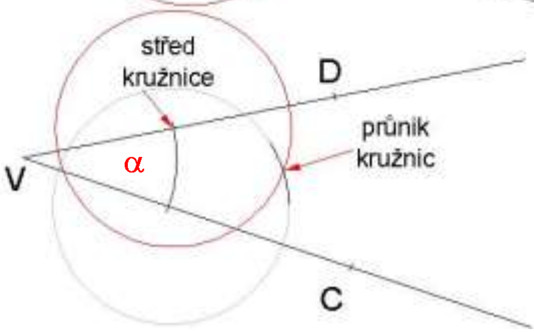
Řešení : 1) Sestrojíme kružnici s libovolným poloměrem a středem V ve vrcholu úhlu **α**.

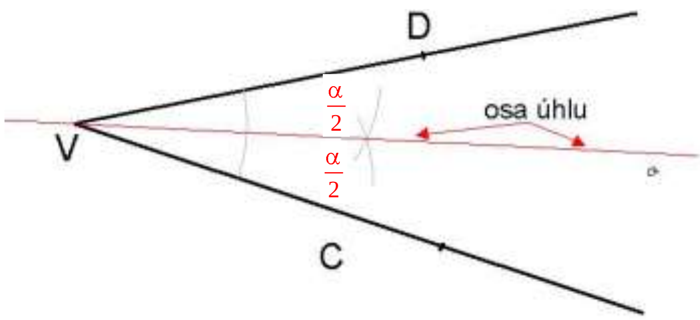
2) Tam, kde tato kružnice protne ramena úhlu α zabodneme kružítko a sestrojíme dvě kružnice se stejným poloměrem (červené kružnice)

3) Bodem X, ve kterém se protnuly obě kružnice a vrcholem úhlu V - vedeme přímku - **osu úhlu.**



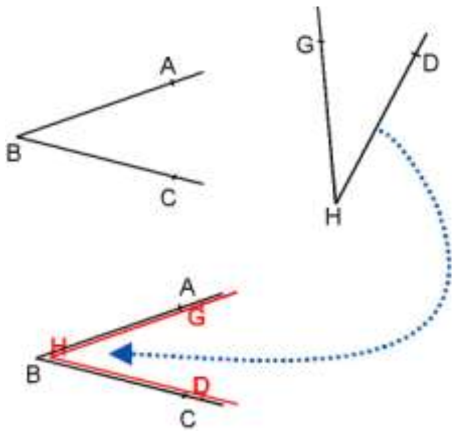






6.1.4. Shodnost úhlů

Shodné úhly jsou takové, které se po přemístění **kryjí**.



Po ukončení naznačeného přesunu $\angle$GHD bude tento úhel přesně krýt $\angle$ABC .
Čteme $\angle$ GHD je <u>shodný</u> s $\angle$ABC .
Zapisujeme $\angle$GHD $\cong$ $\angle$ ABC

Pozor - používáme nový matematický symbol pro shodnost $\cong$

6.2 Velikost úhlu, jednotky

6.2.1 Stupeň, úhlová minuta, úhlová vteřina

Základní jednotkou pro určování velikosti úhlu je **jeden (úhlový) stupeň.**

Zapisujeme: **1°**

1° je $\frac{1}{180}$ přímého úhlu - přímý úhel  je rozdělen na 180 stejných dílků.

Menší jednotkou je **jedna (úhlová) minuta.**

Zapisujeme **: 1´**

$\boxed{1° = 60´}$

Menší jednotkou je **jedna (úhlová) vteřina.**

Zapisujeme - **1´´**

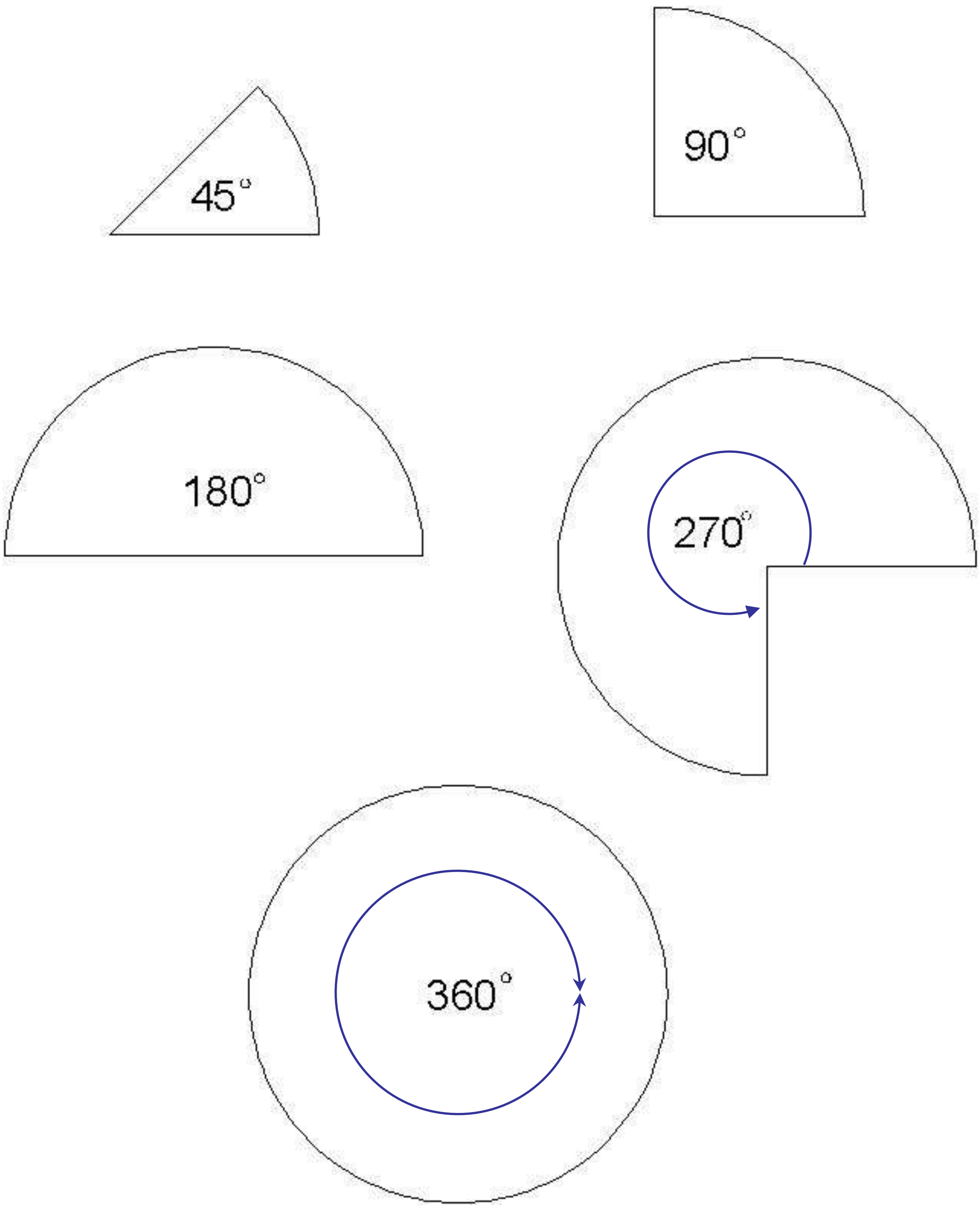
$\boxed{\mathbf{1' = 60''}}$

Poznámka: hovoříme zde o šedesátkové soustavě.

Velikost úhlu zapisujeme dvěma způsoby:

$$\alpha = 42° \quad \text{nebo} \quad |\angle ABC| = 42°$$

<u>Ukázky některých úhlů:</u>



6.2.2. Úhloměr

Pro měření velikosti úhlu používáme - **úhloměr**
Práce s úhloměrem.

Při výpočtech, ve kterých pracujeme se stupni, minutami či vteřinami (úhlovými), je důležité si zapamatovat následující vztah:

- jeden stupeň se skládá ze **60** minut; jedna minuta se skládá ze **60** vteřin -

Příklad : Vyjádřete 420´ ve stupních

Řešení : 420 : 60 = 7 **420´ = 7°**

Příklad : Vyjádřete 130´ ve stupních a minutách

Řešení : 130 : 60 = 2 (zb. 10)

130´ = 2° 10´

Příklad : Vyjádřete 56° 87´ ve stupních a minutách

Řešení : 87´ převedeme na stupně a minuty

87 : 60 = 1 (zb. 27)

87´ = 1° 27´

1° 27´ přičteme k 56°

56° + 1° 27´ = **57° 27´** 56° 87´ = **57° 27´**

Příklad : Vyjádřete 11° 510´´ ve stupních minutách a vteřinách

Řešení : 510 : 60 = 8 (zb. 30)

510´´ = 8´ 30´´ 11° 510´´ = **11° 8´ 30´´**

6.2.3. Sčítání a odčítání velikostí úhlů

Příklad : Sečtěte 64° a 110°

Řešení : 60° + 110° = **170°**

Příklad : Sečtěte 64° 29´ a 110° 14´

(zvlášť sečteme stupně a zvlášť minuty)

Řešení : 64° + 110° = 174° 29´ +14´ = 43´

64° 29´ + 110° 14´ = **174° 43´**

Příklad : Sečtěte 72° 53′ a 29° 34′

Řešení : sečteme zvlášť stupně a zvlášť minuty, pokud je součet minut větší než 60 převedeme minuty následně na stupně a minuty

72° + 29° = 101°   53′+ 34′ = 87′

101° 87′ = 102° 27′

1° 27′

72° 53′ + 29° 34′ = **102° 27′**

Příklad : Odečtěte od úhlu 115° úhel 20° 15′

Řešení : Odečteme nejprve celé stupně, pro odečtení minut převedeme vhodným způsobem zápis stupňů na minuty a provedeme odečtení minut

115° - 20° = 95° = 94° 60′

94° 60′ - 15′ = 94° 45′

115° - 20° 15′ = **94° 45′**

Příklad : Odečtěte od 45° 25′ úhel 10° 50′

Řešení : 45° 25′ - 10° = 35° 25′ (nejprve jsme odečetli celé stupně)

35° 25′ = 34° 85′ (použili jsme jeden stupeň na jeho zápis v minutách)

34° 85′ - 50′ = 34° 35′ (odečetli jsme zbývající minuty)

45° 25′ - 10° 50′ = **34° 35′**

6.2.4. Násobení a dělení velikosti úhlu přirozeným číslem

Příklad : Vynásobte třemi úhel 115° 47′

Řešení : zvlášť vynásobíme stupně a zvlášť minuty, v případě, že je minut více než 60 převedeme je na stupně a minuty

115° . 3 = 345°   47′. 3 = 141′ = 2° 21′

345° + 2° 21′= 347° 21′

115° 47′ . 3 = **347° 21′**

Příklad : Úhel 129° 24′ dělte čtyřmi

Řešení : 129° 24′ = 128° 84′

128° : 4 = 32°   84′ : 4 = 21′

129° 24′ : 4 = **32° 21′**

Různé způsoby vyjádření velikosti úhlů:

$0{,}1° = \frac{1}{10}° = 6'$; $0{,}25° = \frac{1}{4}° = 15'$; $0{,}5° = \frac{1}{2}° = 30'$; $0{,}45° = \frac{3}{4}° = 45'$

$0{,}1' = \frac{1}{10}' = 6''$; $0{,}25' = \frac{1}{4}' = 15''$; $0{,}5' = \frac{1}{2}' = 30''$; $0{,}45' = \frac{3}{4}' = 45''$

Příklad: Zapište jiným způsobem 23,5°
Řešení: 23,5° = 23° 30´

Příklad 1: Převeďte na jednotky uvedené v závorce :

a) 12° (min)
b) 3,5° (min)
c) 420´ (stupně)
d) 4´15´´ (min)
e) 324´15´´ (min)
f) 65,5° (min)
g) 100 420´ (stupně)
h) 604´15´´ (stupně)
i) 0,75° (min)
j) 45° (vteřin)
k) 5° 4´ (vteřin)
l) 14°4´15´´ (vteřin)
m) 1,75° (vteřin)
o) 15,5° 15´´ (stupně)
p) 1 000 vteřin (min)
r) 5 000 vteřin (stupně)
s) 18° 15´´ (minut)
t) 0,25° (vteřin)
u) $\frac{7}{60}$° (minut)
v) 5 $\frac{13}{60}$° (minut)
w) 7 $\frac{59}{60}$° (vteřin)
z) 14 $\frac{17}{60}$° 43´´ (minut)

Příklad 2: Vypočtěte :

a) 82,5° + 25°40´+ 135° 45´=
b) 12,5° + 74°51´+ 35° 15´=
c) 42,25° + 38°30´+ 237° 25´=
d) 210°45´- 142°50´ =
e) 110°25´- 49°47´ =
f) 10°15´- 2°230´ =
g) 35°18´ . 10 =
h) 23°25´ . 8 =
i) 4´15´´ . 4 =
j) 420´ . 12 =
k) 210°45´+ 142°50´ =
l) 28°32´ : 4 =
m) 25°18´ : 3 =
n) 44´15´´ : 5 =
o) 420´ : 5 =
p) 4´15´´ : 10 =
r) 282,5° + 25°40´- 135° 45´=
s) 34´28´´ : 2 =
t) 37,8° + 18° 17´ =
u) 145° 34´36´´ : 2 =
v) 145° 34´36´´ . 2 =

Příklad 3: Vypočtěte :

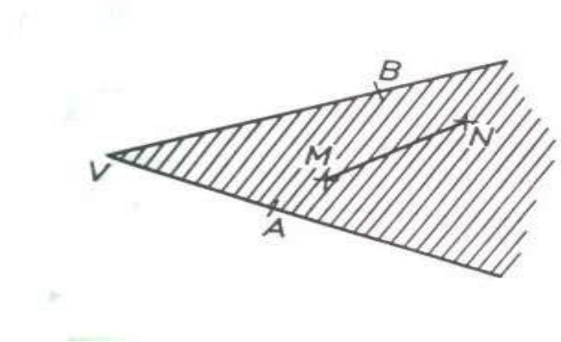
a) 21º 47´21´´ + 5º 21´59´´ + 10º 53´49´´ =
b) 3º 41´ 27´´ + 7º 35´54´´ + 12º54´49´´ =
c) 15º 21´ - 7º 42´ =
d) 13º 20´ 11´´ - 5º 49´ 21´´ =
e) 17º 45´ 21´´ - 9º 57´ 17´´ =
f) 13º 25´ 15´´ . 4 =
g) 12º 27´ 8´´ . 10 =
h) 27º 14´ 12´´ . 6 =
i) 75º : 2 =
j) 27º 15´ : 3 =
k) 20º 24´ 15´´ : 5 =
l) 78º 42´ : 4 =

Úhel můžeme měřit také v dalších jednotkách – **gradech** . Označení 1^g.
1^g je jedna setina přímého úhlu.

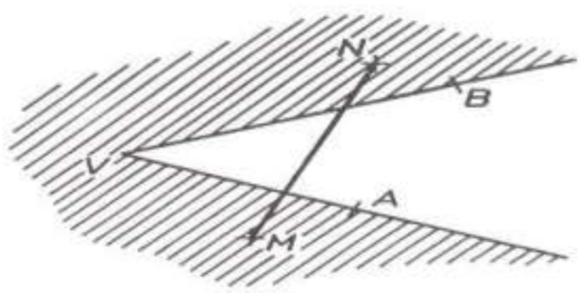
6.3. Druhy úhlů

6.3.1 Konvexní a nekonvexní úhel

Konvexní úhel je takový úhel, pro který platí, že spojíme-li kterékoliv dva různé vnitřní body, tak jejich spojnice bude celá uvnitř úhlu.



Nekonvexní úhel je takový úhel, v němž existují alespoň dva body, jejichž spojnice není podmnožinou tohoto úhlu.



Rozdělení úhlů

úhel

konvexní — nekonvexní

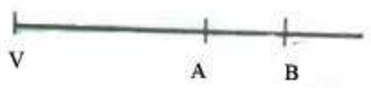
nulové — duté — přímé — plné

kosé — pravé

ostré — tupé

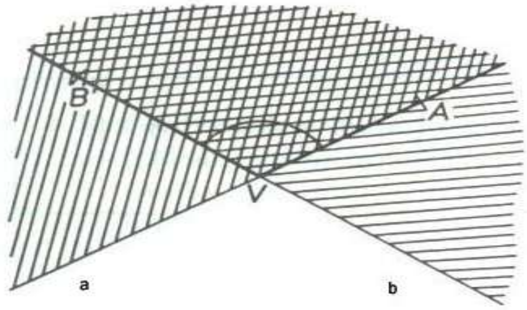
6.3.2. Nulový úhel

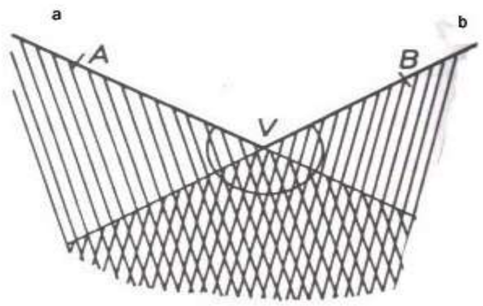
Nulový úhel je takový úhel, jehož ramena jsou totožné polopřímky.
Nulový úhel neobsahuje žádné další (vnitřní) body.



6.3.3. Dutý úhel

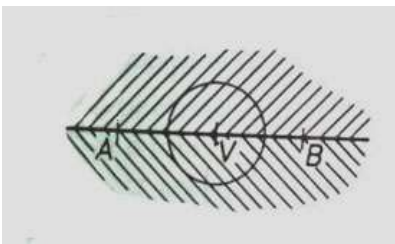
Dutý je takový úhel (∠ AVB) , který vznikne jako průnik dvou polorovin
(aB ; bA)





6.3.4. Přímý úhel

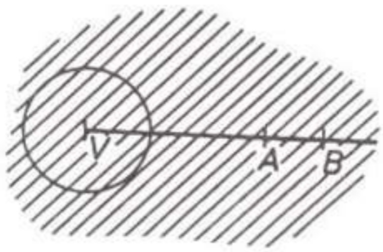
Úhel, jehož ramena jsou navzájem polopřímky opačné, se **nazývá přímý úhel**



Polopřímky VA a VB jsou navzájem opačné.

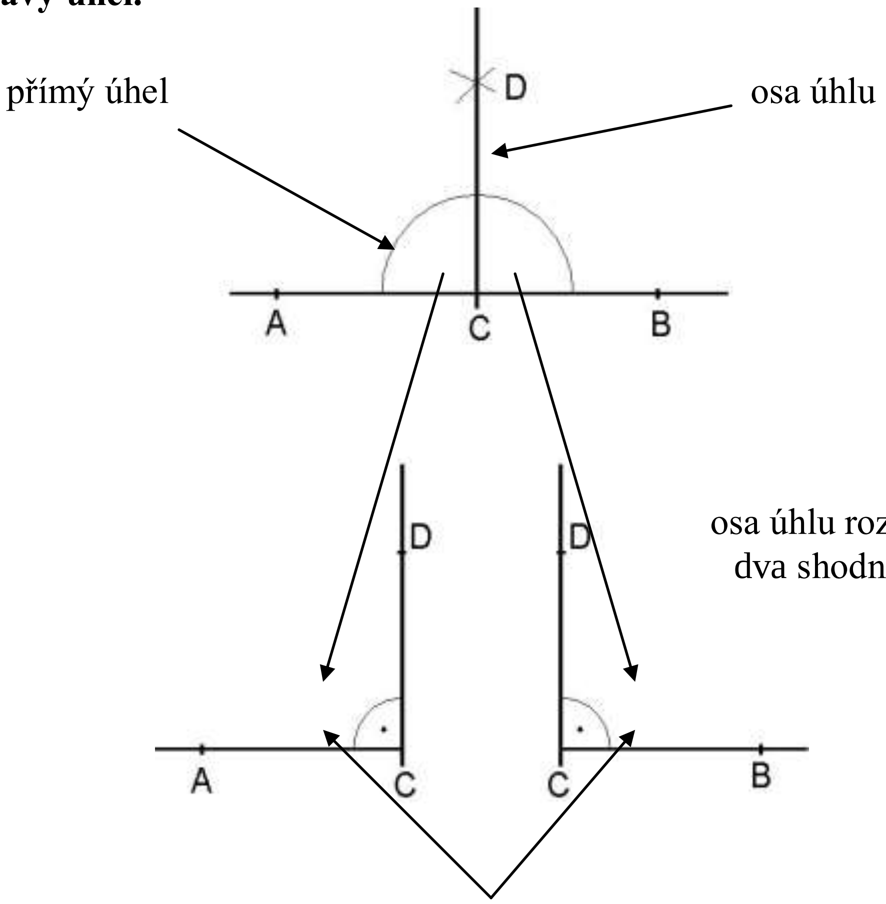
6.3.5. Plný úhel

Plný úhel je takový úhel, jehož ramena jsou totožné polopřímky.
Vnitřní body plného úhlu jsou všechny ostatní body roviny.



6.3.6. Pravý úhel

Každý z úhlů, který vznikne **rozdělením přímého úhlu** na dva **shodné úhly**, se nazývá **pravý úhel.**



osa úhlu rozdělila přímý úhel na dva shodné úhly - pravé úhly

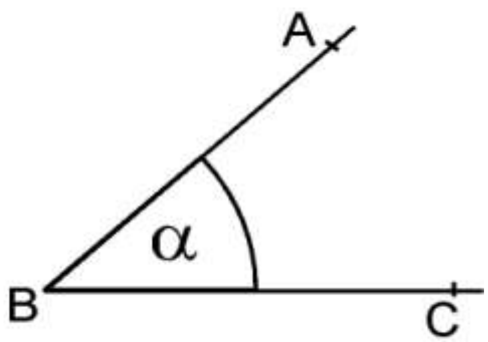
pravý úhel
označujeme jej obloučkem s tečkou

6.3.7. Kosý úhel

Dutý úhel, který není pravý je kosý

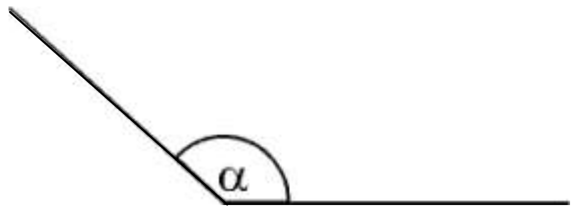
6.3.8. Ostrý úhel

Ostrý úhel je takový úhel, který je menší než 90 ° a větší než 0 °



6.3.9. Tupý úhel

Tupý úhel je takový úhel, který je větší než pravý a menší než přímý.



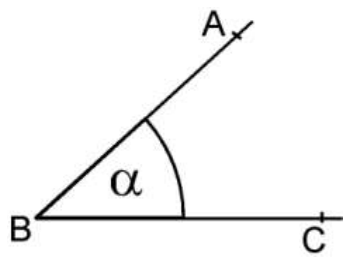
6.3.10. Shrnutí úhlů

ÚHEL α A JEHO VELIKOSTI						
nulový	ostrý	pravý	tupý	přímý	nekonvexní	plný
$\alpha = 0°$	$0° < \alpha < 90°$	$\alpha = 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$\alpha = 180°$	$180° < \alpha < 360°$	$\alpha = 360°$

Ukázky:

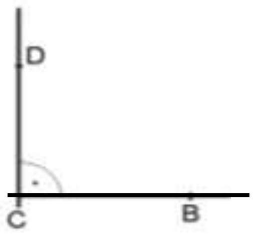
ostrý úhel

$\alpha = 42°$



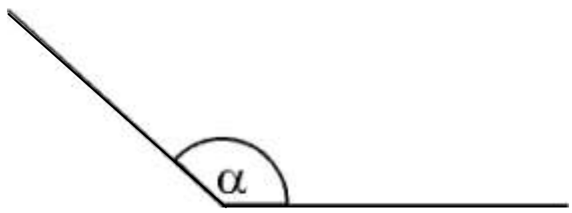
pravý úhel

$/ \angle DCB / = 90°$



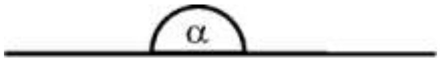
tupý úhel

$\alpha = 137°$



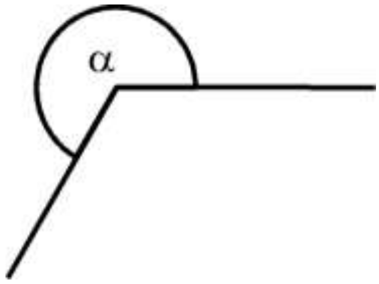
přímý úhel

$\alpha = 180°$



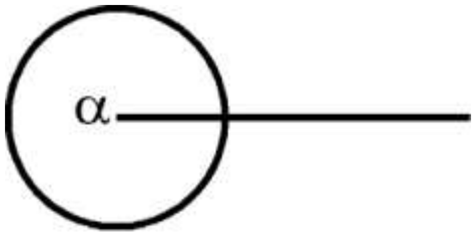
nekonvexní

$\alpha = 240°$

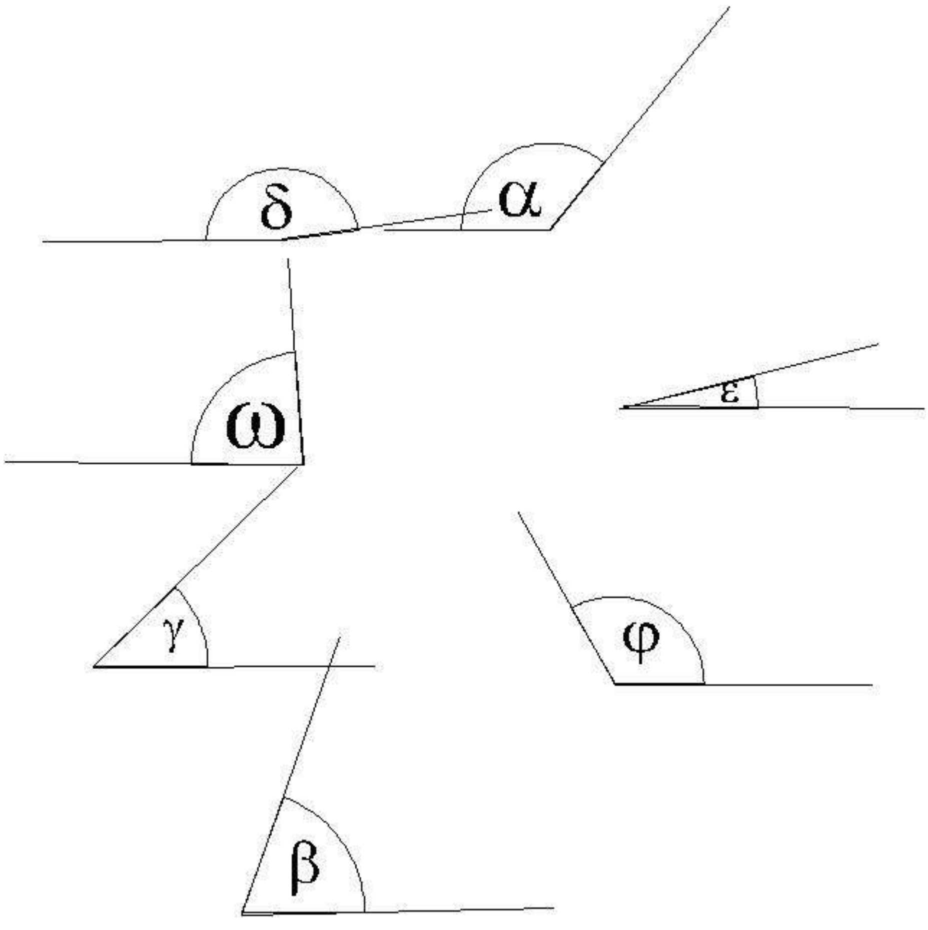


plný

$\alpha = 360°$



Příklad 4 : Rozhodněte, které z úhlů α, β, γ, δ, ε, φ, ω jsou ostré úhly a které jsou tupé úhly.

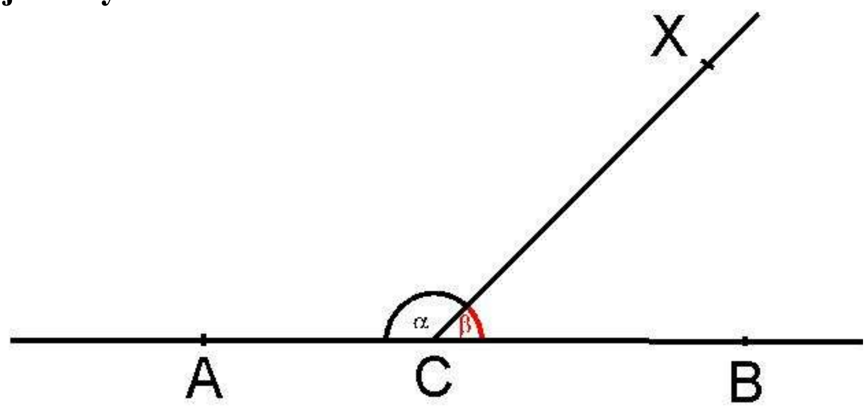


Příklad 5 : Jaký úhel svírají ručičky hodinek v:

a) 3.00	c) 15.00	e) 18.15	g) 20.45
b) 12.00	d) 17.30	f) 19.01	h) 24.00

6.4 Dvojice úhlů

6.4.1. Vedlejší úhly



Úhly α a β budeme nazývat **vedlejší úhly.**

Vedlejší úhly jsou dva úhly, které mají **jedno rameno splývající** a zbývající ramena úhlů jsou navzájem polopřímky opačné**.**
(splývající rameno je $\mapsto CX$ opačné polopřímky jsou $\mapsto CA$ a $\mapsto CB$)

Součet velikostí dvojice vedlejších úhlů je 180°.

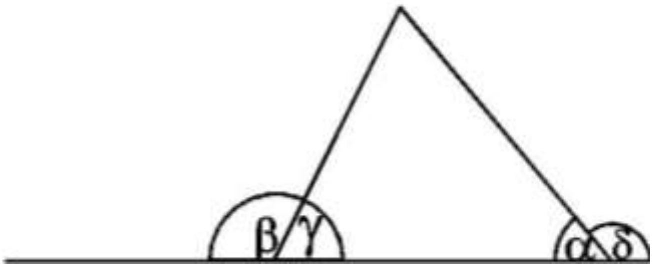
Příklad 6 : Úhly α a β jsou úhly vedlejší. Co mají společného?

Příklad : Úhly α a β jsou úhly vedlejší. α = 135°. Kolik měří úhel β ?
Řešení : α a β jsou úhly vedlejší; α + β = 180°
135° + β = 180°
β = 180° - 135°
β = 45°

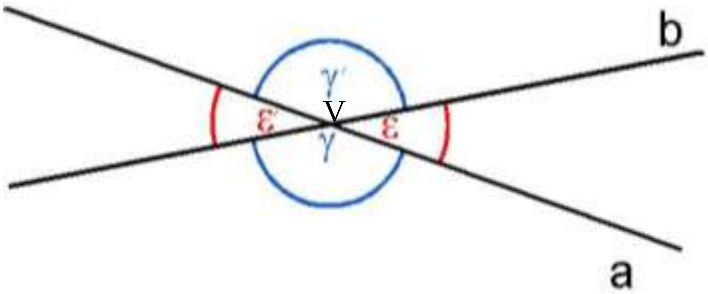
Příklad 7 : Přímky <u>a</u> a <u>b</u> se protínají v bodě H. Jeden z úhlů při vrcholu H má velikost 50 ° Vypočtěte velikosti tří zbývajících úhlů.

Příklad 8 : Existuje konvexní úhel, který by měl stejně veliký také vedlejší úhel ? Jestliže ano, pak jakou má velikost? Označujeme tento úhel speciálním názvem ?

Příklad 9 : Velikosti úhlů na obrázku jsou následující : $\beta = 121°$, $\delta = 137°23'$
Vypočtěte úhly γ , α.



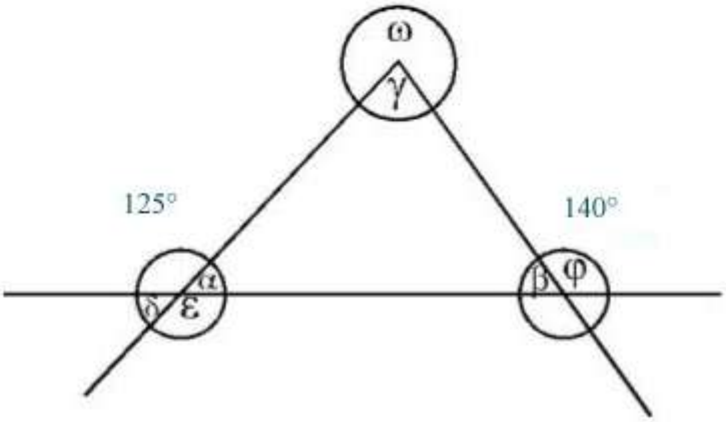
6.4.2. Vrcholové úhly



Dva úhly, které mají **společný vrchol** a jejichž ramena jsou navzájem **opačné polopřímky**, se nazývají **vrcholové úhly**.

Vrcholové úhly jsou shodné.
ε a ε' jsou vrcholové úhly (mají stejnou velikost)
γ a γ' jsou vrcholové úhly (mají stejnou velikost)

Příklad 10 : Určete velikosti úhlů α, β, γ, δ, ε, ω.
(Poznámka : Součet úhlů v trojúhelníku je 180º .)



Příklad 11 : Pro jak veliký úhel platí, že on a jeho vrcholový úhel :

a) mají stejnou velikost

b) jsou dva shodné úhly.

Příklad 12: Sestrojte dvojici úhlů, aby :

a) jeden z dvojice vedlejších úhlů má 25°

b) jeden z dvojice vrcholových úhlů má 25 °

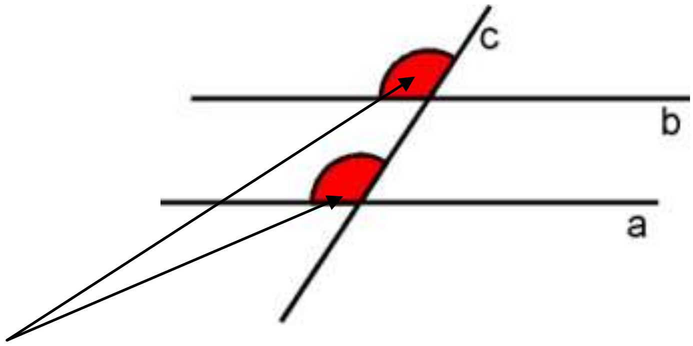
c) oba vedlejší úhly měly shodnou velikost

d) oba vrcholové úhly měly shodnou velikost

6.4.3. Souhlasné úhly

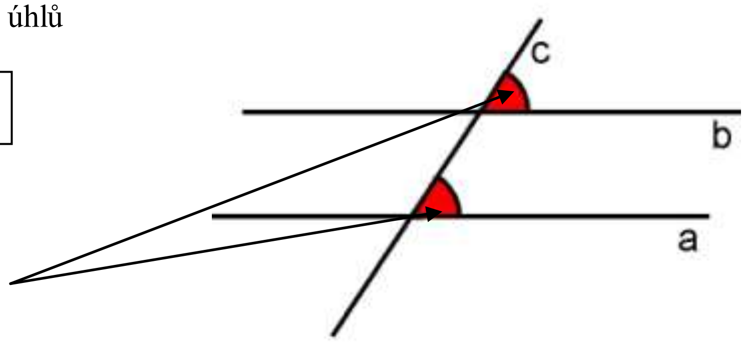
Přímky a, b jsou rovnoběžné. Jsou protnuté přímkou **c**.
Úhly barevně vyznačené na obrázcích 1 - 4 nazýváme **úhly souhlasné.**
Úhly souhlasné jsou **shodné.**

obr. 1



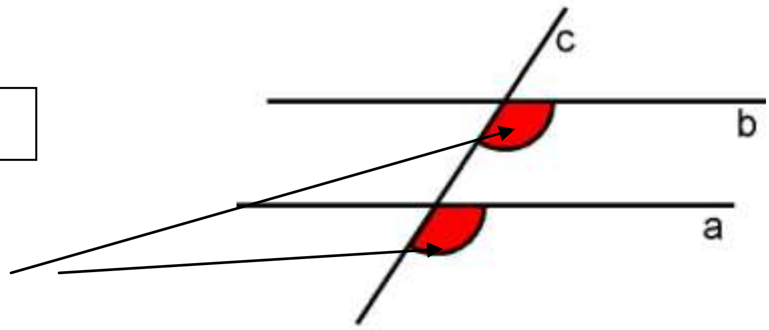
stejná velikost úhlů

obr. 2

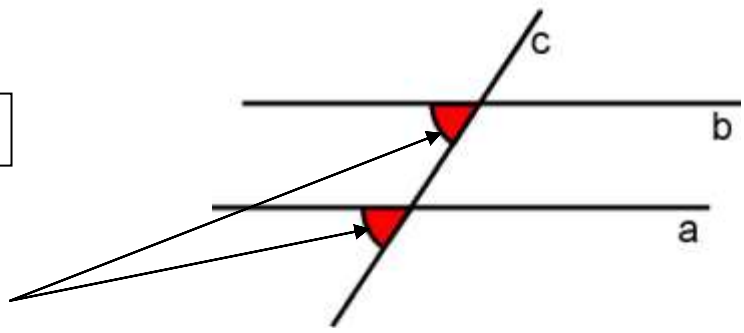


stejná velikost úhlů

obr. 3



obr. 4

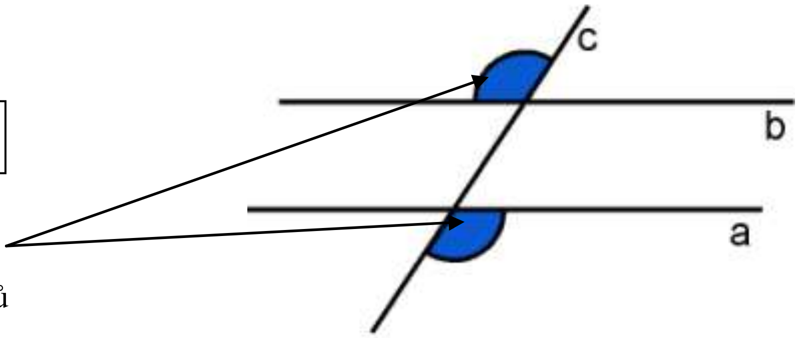


stejná velikost úhlů

6.4.4. Střídavé úhly

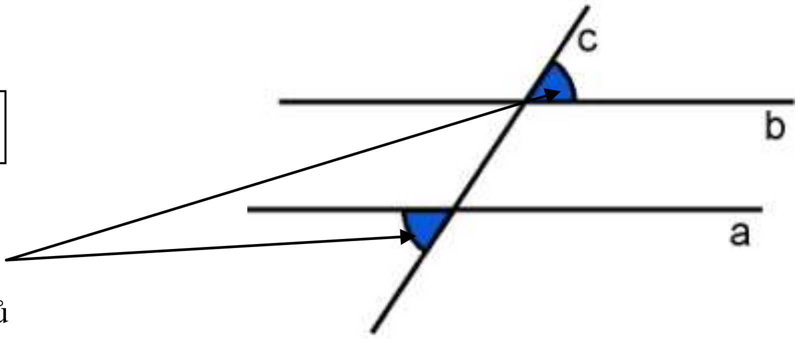
Úhly barevně vyznačené na obrázcích 5 - 8 nazýváme **úhly střídavé.**
Úhly střídavé jsou **shodné.** (a || b)

obr. 5



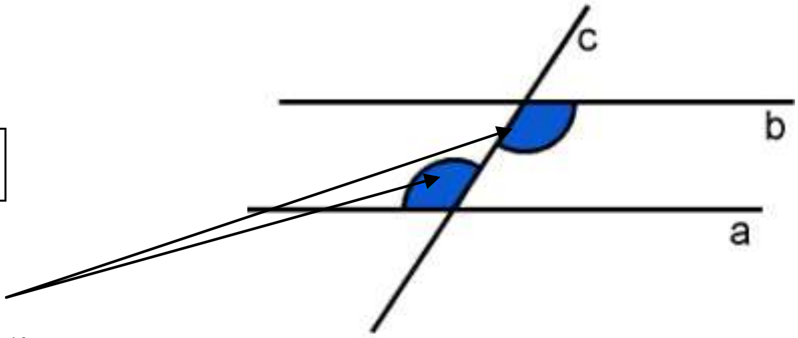
stejná velikost úhlů

obr. 6



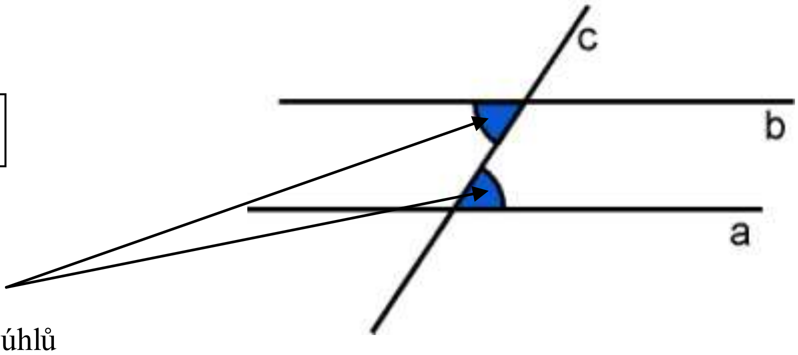
stejná velikost úhlů

obr. 7



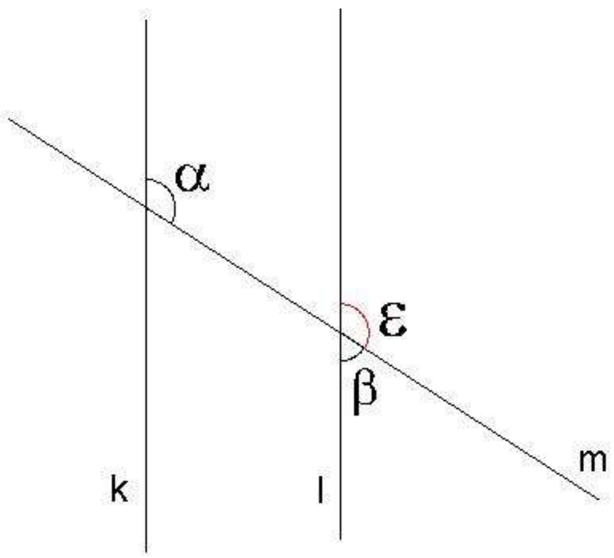
stejná velikost úhlů

obr. 8



stejná velikost úhlů

Příklad : Určete velikost úhlů β; $\alpha = 110°$, $k \parallel l$



Řešení : **α a ε** jsou **souhlasné úhly** (mají stejnou velikost)

$\alpha = \varepsilon$;

ε = 110°

ε a β jsou vedlejší úhly (součet jejich velikostí je 180°)

$\varepsilon + \beta = 180°$

$\beta = 180° - \varepsilon$

$\beta = 180° - 110° = 70°$

$\beta = 70°$

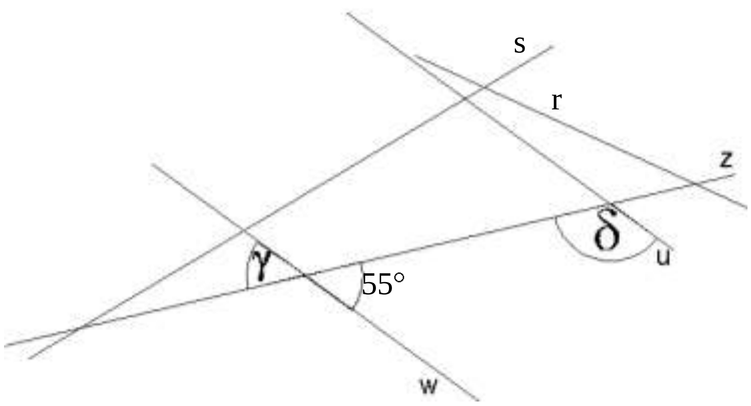
Příklad 13 : Pro jak veliký úhel platí, že on a jeho souhlasný úhel :

a) mají stejnou velikost b) jsou dva shodné úhly.

Příklad 14 : Pro jak veliký úhel platí, že on a jeho střídavý úhel :

a) mají stejnou velikost b) jsou dva shodné úhly.

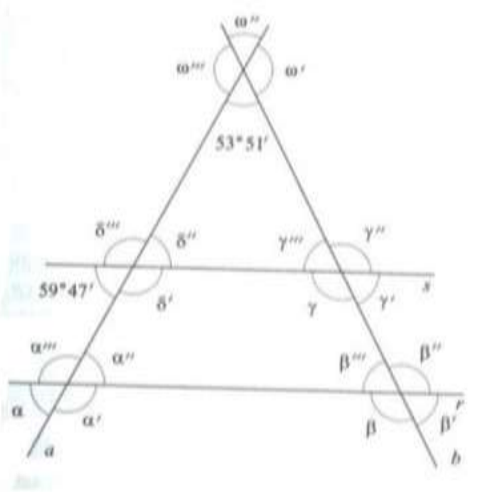
Příklad 15: Přímky <u>w</u> a <u>u</u> jsou rovnoběžné. Určete velikosti úhlů γ a δ.



Příklad 16 : Přímka AB protíná rovnoběžné přímky MN a_OP postupně v bodech X; Y. Úhel MXA je 60 ° . Bod O leží v polorovině ABM. Vypočtěte velikost úhlů :

a) $\angle$ AXN	d) $\angle$ PYB	g) $\angle$ MXN
b) $\angle$ NXB	e) $\angle$ YXB	
c) $\angle$ AYO	f) $\angle$ NXY	

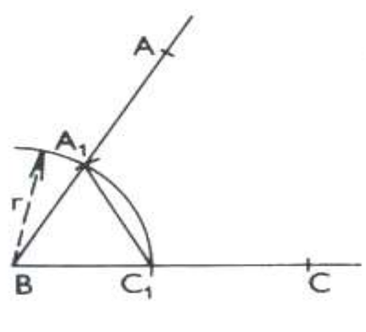
Příklad 17 : Vypočítejte velikosti jednotlivých úhlů jestliže víme, že α'' + + β'''+ 53º 51´ = 180º

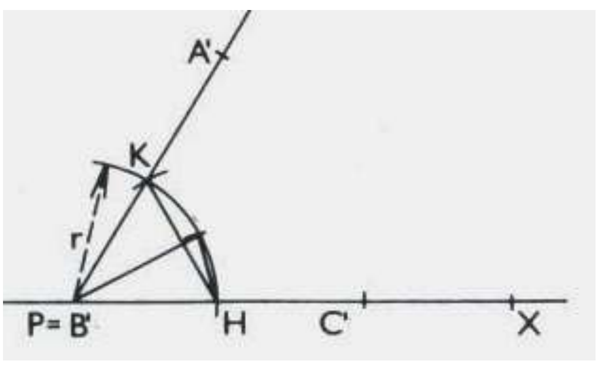


6.5. Grafické sčítání, odčítání úhlů

6.5.1. Přenášení úhlů

Příklad : Úhel ABC přeneste tak, aby rameno BC leželo na přímce PX
Řešení: 1) narýsujeme libovolný $\angle$ ABC a mimo přímku PX
2) na přímce PX zvolíme bod B´, například P ≡ B´
3) k ≡ (B ; r) r je libovolné číslo k´≡ (P; r)
4) k ∩ BA ≡ A_1 k ∩ BC ≡ C_1
5) k ´∩ PX ≡ H
6) k_1 ≡ (H ; A_1C_1)
7) k_1 ∩ k´ ≡ K
8) $\angle$XPK





Příklad : Graficky porovnejte velikost dvou úhlů.

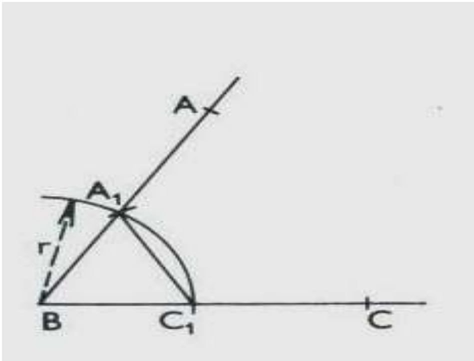
Řešení: 1) Narýsujeme $\angle ABC$ a $\angle EFG$ a přímku PX

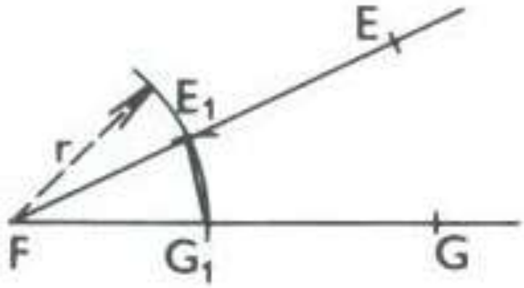
2) k ≡ (B ; r) k′≡ (F; r) k′′≡ (P; r)

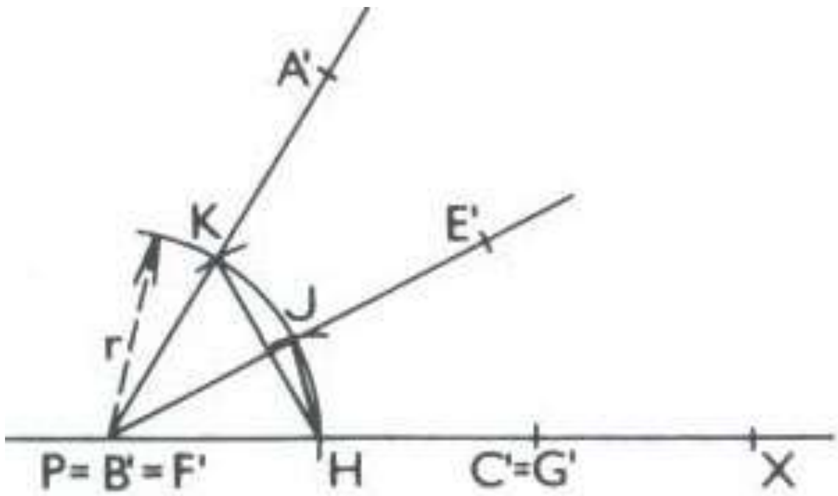
3) přeneseme $\angle ABC$ k přímce PX

4) přeneseme $\angle$ EFG k přímce PX

5) podle velikosti úseček KH a JH určíme vetší úhle (větší úsečce přísluší větší úhel)







6.5.2. Sčítání úhlů

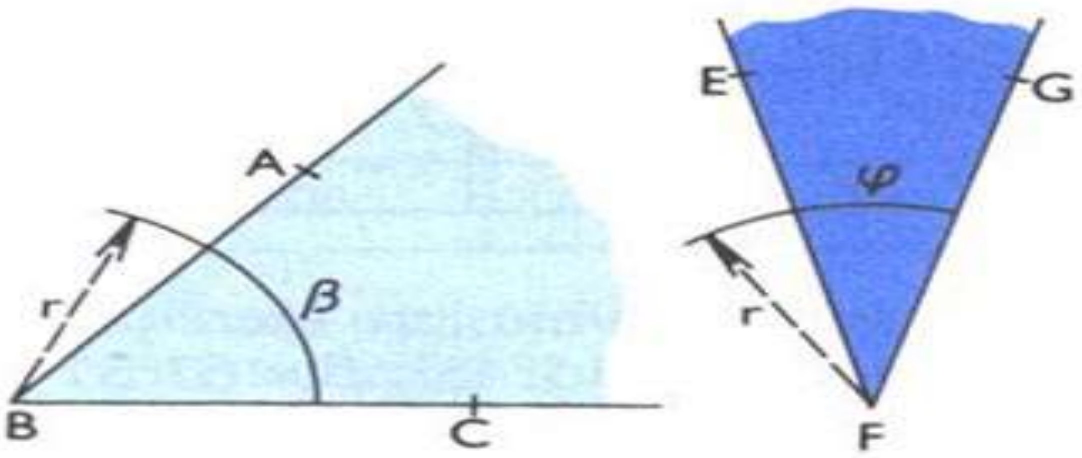
Příklad : Určete grafický součet úhlů β a φ Výsledný úhel označte ω.

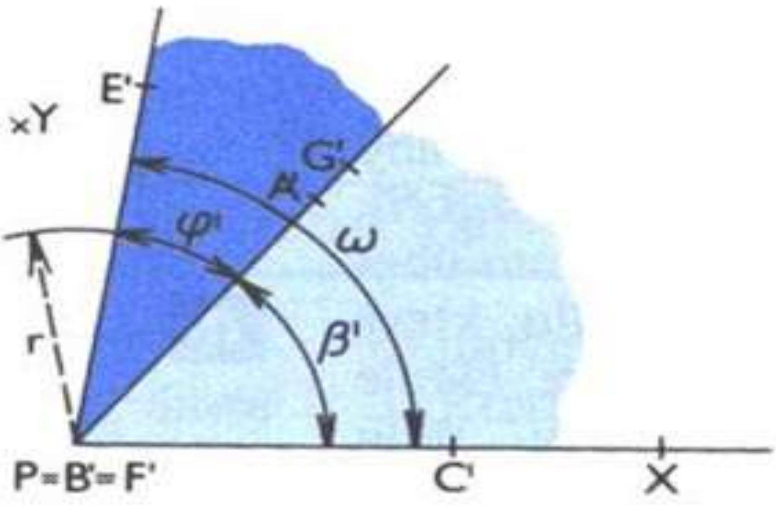
Řešení : 1) narýsujeme ∠ ABC a ∠EFG a přímku PX

2) k přímce PX přeneseme ∠ ABC

3) k ramenu ∠AB´C´ – např. B´A´ přeneseme ∠ EFG

4) vzniklý ∠C´B´E´ je úhel, který má velikost součtu zadaných úhl





6.5.3. Odčítání úhlů

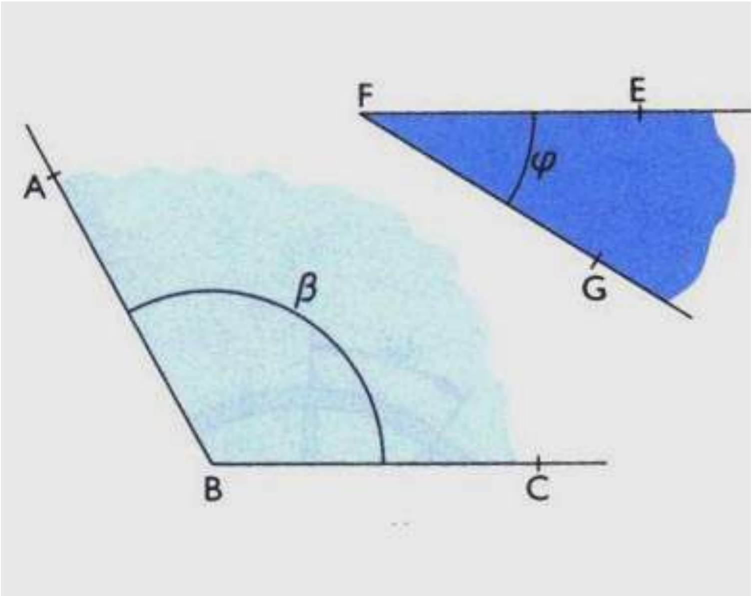
Příklad : Určete grafický rozdíl úhlů β a φ Výsledný úhel označte ω.

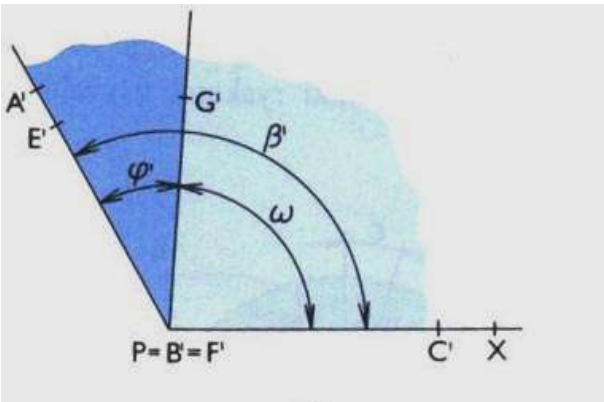
Řešení : 1) narýsujeme ∠ ABC a ∠EFG a přímku PX

2) k přímce PX přeneseme ∠ ABC

3) k ramenu ∠AB´C´ – např. B´A´ přeneseme ∠ EFG, ale do opačné poloroviny než když jsme úhel graficky sčítali

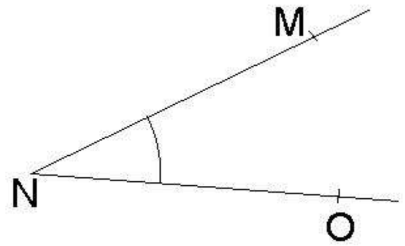
4) vzniklý ∠C´B´G´ je úhel, který má velikost součtu zadaných úhlů

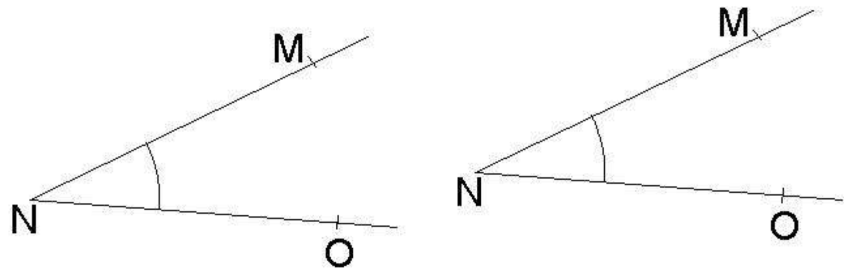




6.5.4. Násobení úhlu

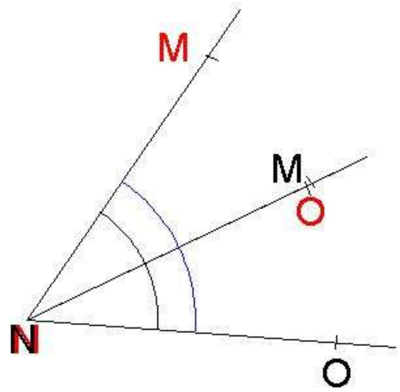
Příklad : Sestrojte dvojnásobek $\angle$MNO
Postup: jedná se vlastně o grafický součet dvou stejných úhlů





2x stejný úhel

Graficky provedený
součet dvou stejných úhlů

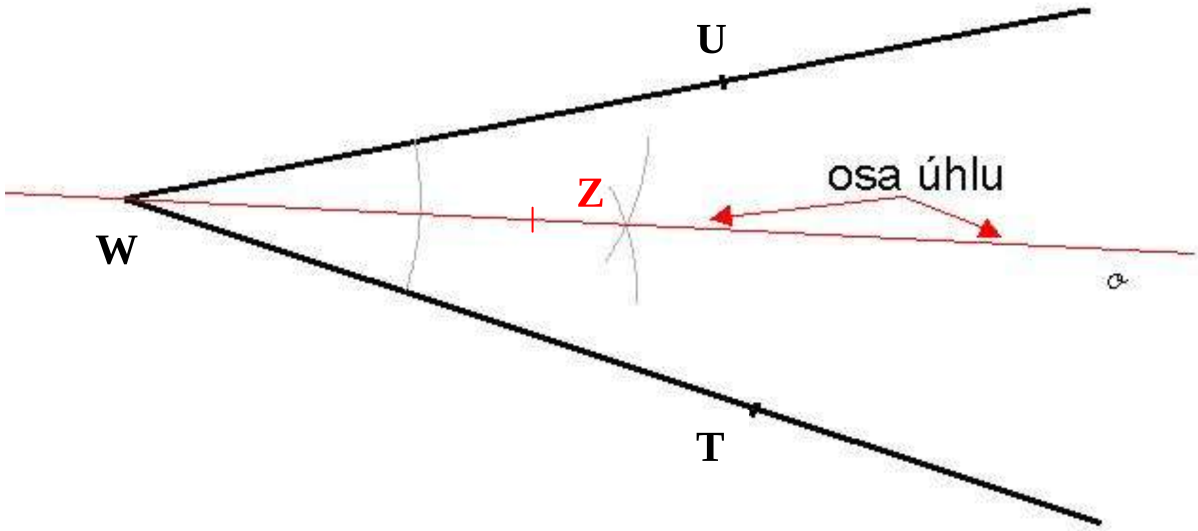


Grafický dvojnásobek úhlu $\angle$MNO

Poznámka : Pokud úhel budeme násobit jiným číslem, tak budeme sčítat přesně tolikrát tento úhel.

6.5.5. Dělení úhlu

Příklad : sestrojte graficky polovinu úhlu $\angle$UWT



Úhel UWZ je polovinou úhlu UWT.

Můžeme zapsat $|\angle UWZ| = \frac{1}{2}|\angle UWT|$

Poznámka : označení pro úhel umístěné mezi dvě „svislé závorky“ čteme jako **velikost** úhlu.
Zápis čteme - *velikost úhlu UVZ je polovinou velikosti úhlu UWT*

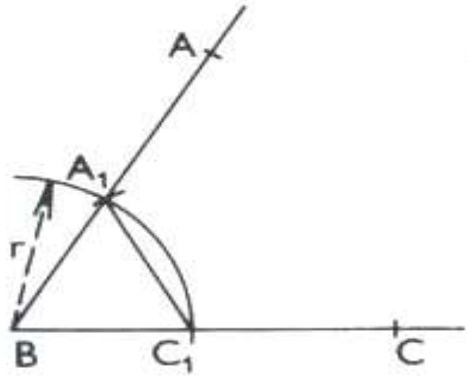
Příklad 18 : Pomocí úhloměru narýsujte $\alpha = 13°$ $\beta = 58°$. Sestrojte graficky :

Příklad 19 : Sestrojte libovolný trojúhelník. Střed strany AB označte C_1, střed strany BC označte A_1 a střed strany CA označte B_1. Dokažte, že vnitřní úhel trojúhelníku $A_1B_1C_1$ při vrcholu B_1 je shodný s vnitřním úhlem trojúhelníku ABC při vrcholu B.

6.6 Konstrukce úhlů pomocí pravítka a kružítka

Příklad : Pomocí pravítka a kružítka narýsujte úhel $|\angle ABC| = 60°$.
Řešení : 1) polopřímku BC
2) $k \equiv (B ; r)$ r je libovolné číslo $k \cap BC \equiv C_1$
3) $k_1 \equiv (C_1 ; r)$
4) $k \cap k_1 \equiv A_1$
5) polopřímka BA_1

6) $|\angle ABC| = 60°$



Při konstrukci úhlů pomocí pravítka a kružítka budeme používat své vědomosti o grafickém sčítání, odčítání úhlů, násobení a dělení úhlu přirozeným číslem.

Příklad 20 : Narýsujte $\angle ABC$, který má velikost :

a) 30 °	g) 300 °	m) 135 °	t) 247,5 °
b) 15 °	h) 330 °	n) 105 °	u) 7 ° 30´
c) 120 °	i) 45 °	o) 225 °	v) 52,5 °
d) 150 °	j) 75 °	p) 255 °	w) 202 ° 30´
e) 210 °	k) 165 °	r) 315 °	
f) 240 °	l) 195 °	s) 345 °	

Příklad 21 : Umíte pomocí kružítka a pravítka sestrojit úhel o velikosti :
a) 0 ° b) 7,5 ° c) 10 ° d) 360 ° e) 11 ° 15´ f) 200 °

Souhrnná cvičení

1) Zvolte tři body *K,L,M* neležící na přímce a narýsujte úhel *KLM*.

2) Pomocí úhloměru sestrojte úhly:

a) 26°	d) 102°	g) 200°
b) 65°	e) 114°	h) 300°
c) 95 °	f) 168°	

3) Je pravda, že tři různé body A, B, C, které neleží v přímce, určují v rovině celkem šest úhlů? Jestliže ano, úhly zapiš.

4) Narýsujte úhly $\alpha = 110°$ a $\beta = 55°$. Sestrojte kružítkem a pravítkem :
a) $\gamma = \alpha + \beta$ b) $\delta = \alpha - \beta$

5) Narýsujte úhly $\alpha=150°$ a $\beta = 60°$. Sestroj pravítkem a kružítkem :

a) $\gamma = \alpha + \beta$

b) $\delta = \alpha - \beta$

6) Narýsujte dva libovolné tupé úhly KLM a RST a graficky je sečtěte. Výsledek zapište.
Jaký úhel vznikl ?

7) Vzniklý úhel bude konvexní či nekonvexní :

a) 119°16’+ 35°40’

b) 93°45’+ 110°38’

c) 18°56’ - 9°09’

d) 35°15’ - 16°36’

8) Narýsujte bez úhloměru úhly $\alpha = 120°$ $\beta = 45°$. Graficky proveďte:

a) $\gamma = \alpha + \beta$ a proveďte kontrolu úhlu γ změřením úhloměrem

b) $\delta = \alpha - \beta$ a proveďte kontrolu úhlu δ změřením úhloměrem

c) $\lambda = 3 . \alpha$ a proveďte kontrolu úhlu λ změřením úhloměrem

d) $\omega = \frac{\alpha}{4}$ a proveďte kontrolu úhlu ω změřením úhloměrem

e) $\eta = 2 . \lambda - 3. \delta + \alpha - 2. \beta$ a proveďte kontrolu úhlu η změřením úhloměrem.

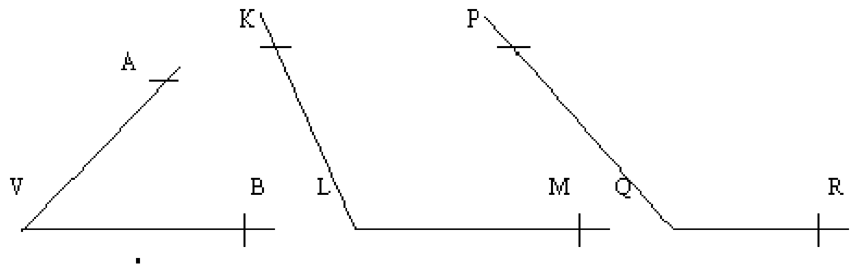
f) narýsujte osu úhlu α

9) Narýsujte libovolný tupý úhel KLM a pravý úhel RST. Sestrojte jejich rozdíl. Jak nazveme tento úhel ?

10) Bez úhloměru narýsujte úhel :

a) 240°	c) 300°	e) 105°	g) 150°
b) 255°	d) 75°	f) 135°	h) 165°

11) Jsou dány tři úhly: $\alpha = \angle AVB$, $\alpha+\beta = \angle KLM$, $\alpha + \beta + \gamma = \angle PQR$.. Sestroj úhly β a γ.



12) Převeďte na jednotky uvedené v závorce:

a) 43° (min)

b) 15,5° (min)

c) 17° 21´(min)

d) 54°32´ (vteřin)

e) 19,25° (vteřin)

f) 13,5° (min)

g) 2 420´ (stupně)

h) 25´15´´ (min)

i) 12 780´´ (min)

j) 21 000´´ (stupňů, minut, vteřin)

k) 100° 11´(vteřin)

13) Vypočtěte :

a) 72,5° + 45°21´+ 57° 14´=

b) 190° 37´- 121° 59´ =

c) 53°24´ . 15 =
d) 31°25´ . 7 =
e) 245°32´ : 4 =
f) 305°18´ : 3 =
g) 77° : 5 =

h) 32°54´43´´+12°18´ 58´´ + 97°41´7´´ =
i) 4 . 45° 54´=
j) 4 . 45° 21 ´ 46 ´´ - 3 . 24° 47´ 24´´ =
k) 360° : 5 =

14) Jsou dány úhly α a ß, pro které platí α = 38°, ß = 65°. Od dvojnásobku velikosti úhlu α odečti velikost úhlu ß.

15) Narýsujte čtverec ABCD. Na straně AB zvol bod E a na straně CD bod . Sestrojte přímku EF. Vypište všechny vedlejší úhly.

16) Narýsujte čtverec ABCD o straně a = 4 cm. Narýsujte přímku x, která protíná AD v bodě L a CD v bodě K. Dále narýsujte přímku y, která je rovnoběžná s přímkou x. Přímka y protíná AB v bodě M a CD v bodě N. Pojmenujte všechny úhly, které jsou k úhlu AMN :

a) vedlejší b) vrcholové c) souhlasné d) střídavé

17) Narýsujte čtverec ABCD o straně a = 4 cm. Narýsujte přímku x, která protíná AD v bodě L a CD v bodě K. Dále narýsujte přímku y, která je rovnoběžná s přímkou x. Přímka y protíná AB v bodě M a CD v bodě N. Pojmenujte všechny úhly, které jsou k úhlu KLN :

a) vedlejší b) vrcholové c) souhlasné d) střídavé

18) Narýsujte čtverec ABCD. Na straně AB zvolte bod E a na straně CD bod F. Sestrojte přímku EF. Vypište všechny dvojice :

a) střídavých úhlů
b) vedlejších úhlů
c) vrcholových úhlů
d) souhlasných úhlů

19) Narýsujte přímku a a zvolte na ní dva různé body A, B. Sestrojte dvojici souhlasných úhlů, které mají jedno rameno v přímce a a vrcholy v bodech A, B.

20) Narýsujte různoběžky a, b a zapište všechny dvojice úhlů vedlejších a dvojice úhlů vrcholových těmito různoběžkami určených.

21) Úhel má velikost 28°46'. Určete velikosti jeho vedlejšího úhlu.

22) Úhel má velikost 101°10'10''. Určete velikosti jeho vedlejšího úhlu.

23) Jeden ze čtyř úhlů vyťatých dvěma různoběžkami měří *40°.* Určete velikost ostatních tří úhlů.

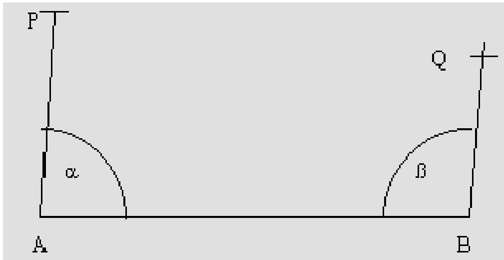
24) Dvě přímky se protínají tak, že jeden jimi sevřený úhel je dvojnásobkem druhého. Vypočtěte velikost všech čtyř úhlů, jež dané přímky vytvoří.

25) Úhel AVB je shodný se sedminou svého vedlejšího úhlu. Vypočtěte velikost úhlu AVB.

26) Úhel *AVB* je shodný s třemi pětinami svého vedlejšího úhlu. Vypočtěte velikost úhlu *AVB*.

27) Úhly α, β jsou vedlejší. Stanovte jejich velikost, je-li
a) $\alpha = 3\beta$ b) $\alpha = (1/2)\beta$ c) $3\alpha = 2\beta$

28) Rozhodněte, zdali se protnou polopřímky AP, BQ, když úhel :
a) $\alpha = 85°$ a $\beta = 90°$
b) $\alpha = 85°$ a $\beta = 95°$
c) $\alpha = 85°$ a $\beta = 100°$
d) $\alpha = 85°$ a $\beta = 85°$
e) $\alpha = 85°$ a $\beta = 105°$.



29) Dvě rovnoběžné přímky a, b jsou protnuty přímkou c, která s rovnoběžkami svírá úhel 42°.
a) vypočtěte velikosti všech úhlů, které tak vzniknou
b) zapište dvojice souhlasných úhlů
c) zapište dvojice střídavých úhlů
d) zapište dvojice vrcholových úhlů
e) zapište dvojice vedlejších úhlů
f) vznikl tupý úhel
g) vznikl kosý úsek
h) vznikl dutý úhel
i) vznikl přímý úhel

30) Narýsujte obdélník ABCD o stranách 5 cm a 8 cm. Narýsujte jeho úhlopříčky. Změřte jeden jeho úhel a výpočtem stanovte velikosti všech ostatních úhlů, které jsou v daném obdélníku.

31) Narýsujte dvě různoběžky p, q, které svírají úhel $\alpha = 52°$. Označ ostatní úhly β, χ, δ. Změřte jejich velikosti. Sestrojte libovolnou rovnoběžku c s přímkou p. Označte k úhlu α úhel souhlasný a určete jeho velikost.

32) V rovnoběžníku ABCD je AB rovnoběžná s CD (AB // CD) a BC // AD. Úhel CAB = $\delta = 21°$, úhel DAC = $\mu = 2\delta$. Urči velikost úhlu DCA = δ'.

33) V rovnoběžníku ABCD je AB // CD a BC // AD Úhel CAB = $\delta = 21°$,úhel DAC = $\mu = 2\delta$. Určete velikost úhlu ACB.

34) Je možné, aby :
a) součet dvou vedlejších úhlů byl úhel tupý
b) součet dvou vedlejších úhlů byl úhel přímý
c) jeden z dvojice vedlejších úhlů byl úhel nekonvexní
d) součet dvou vrcholových úhlů byl úhel ostrý
e) součet dvou vrcholových úhlů byl úhel přímý

f) součet dvou souhlasných úhlů byl úhel kosý
g) součet dvou souhlasných úhlů byl úhel přímý
h) jeden z dvojice střídavých úhlů byl úhel ostrý
i) dvojice střídavých úhlů byly úhly ostré
j) součet dvou ostrých úhlů byl úhel přímý
k) dvojnásobek ostrého úhlu byl úhel tupý
l) polovina přímého úhlu byl úhel ostrý.

35) Vypočtěte :

a) $5^\circ 27' + 46^\circ =$
b) $24^\circ 47' + 85^\circ 36' =$
c) $136^\circ 51' + 25^\circ 38' =$
d) $7^\circ 9' + 35^\circ 16' =$
e) $107^\circ 49' + 66^\circ 54' =$
f) $159^\circ 38' + 27^\circ 45' =$
g) $28^\circ 35' - 14^\circ 08' =$
h) $77^\circ 32' - 58^\circ 18' =$
i) $180^\circ - 132^\circ 56' =$
j) $140^\circ - 76^\circ 37' =$
k) $65^\circ 13' - 26^\circ 32' =$
m) $65^\circ 13' - 58^\circ 31' =$

36) Převeďte :

a) 4 273′′ (º ′ ′′)
b) 7º 12′ 4′′ (′′)
c) 5º 14′ 30′′ (′)
d) 17 385,5′ (º ′ ′′)
e) 3 896′′ (º ′ ′′)
f) 9º 27′ 12′′ (′′)
g) 7º 25′30′′ (′′)
h) 26 481,5′ (º ′ ′′)

37) Jaký úhel svírají ručičky hodinek v :

a) 9.30 hodin;
b) 8.15 hodin;
c) 10.40 hodin;
d) 11.55 hodin;

Výsledky příkladů :

1) a) 720′ ; b) 210′ ; c) 7° ; d) $4\frac{1}{4}$′ ; e) 324 $\frac{1}{4}$′ ; f) 3 930′ ; g) 1 673 $\frac{2}{3}$° nebo 1 673,7° ; h) 10°4′ 15′′ ; i) 45′ ; j) 162 000′′ ; k) 18 240′′
l) 50 655′′ ; m) 6 300′′ ; o) 15°30′15′′ ; p) 16′40′′ ; r) 1°23′20′′ ;
s) 1 080 $\frac{1}{4}$′ ; t) 900′′ ; u) 7′ ; v) 313′ ; w) 28 740′′ ; z) 857′43′′ nebo 857 $\frac{43}{60}$′ ;

2) a) 243°55′ ; b) 122°36′ ; c) 318°10′ ; d) 67°55′ ; e) 60°38′ ; f) 4°25′ ;
g) 353° ; h) 187°20′ ; i) 17′ ; j) 84° ; k) 353°35′ ; l) 7°8′ ; m) 8°26′ ;
n) 8′51′′ ; o) 1°20′ ; p) 25,5′′ ; r) 172°25′ ; s) 17′14′′ ; t) 56°5′ ;
u) 72°47′18′′ ; v) 291°9′12′′ ;

3) a) 38º 3′ 9′′ ; b) 24º12′ 10′′ ; c) 7º 39′ ; d) 7º30′ 50′′ ;
e) 7º 48′ 4′′ ; f) 53º 41′ ; g) 124º 31′ 20′′ ; h) 163º 25′ 12′′ ;
i) 37º 30′ ; j) 9º 5′ ; k) 4º 4′ 51′′ ; l) 19º 40′ 30′′ ;

4) $\omega, \varepsilon, \chi, \beta$ - jsou ostré úhly;

5) a) 90° nebo 270°; b) 0° nebo 360° ; c) 90° nebo 270°; d) 15° nebo 345° ;
e) 97,5° nebo 262,5° ; f) 155,5° nebo 204,5° ; g) 7,5° nebo 352,5° ; h) 0° ;

6) jedno rameno;**7)** 130°; 50° ; 130°;**8)** pravý úhel; 90° ;**9)** α = 42°37′ ; γ = 59° ;

10) α = 55° ; β = 40° ; χ = 85° ; δ = 55° ; ε = 125° ; ω = 275° ;

11) a) pro libovolný úhel menší než 180° ; b) pro libovolný úhel menší než 180°;
12) a) 25° ; 155° ; b) 25° ; 25° ; c) 90° ; 90° ; d) každé dva vrcholové úhly;
13) a) pro každou dvojici souhlasných úhlů toto platí; b) pro každou dvojici souhlasných úhlů toto platí;
14) a) pro každou dvojici vrcholových úhlů to platí; b) pro každou dvojici vrcholových úhlů to platí;
15) $\chi = 55°$; $\delta = 125°$;
16) a) 120° ; b) 60° ; c) 60° ; d) 60° ; e) 0°; f) 60°; g) 180° ;
17) $59°47' = \alpha = \alpha'' = \delta''$ $120°13' = \alpha' = \alpha''' = \delta' = \delta'''$
$53°51' = \omega''$ $126°\,9' = \omega' = \omega'''$ $113°38' = \chi = \chi'' = \beta = \beta''$
$66°22' = \chi' = \chi''' = \beta''' = \beta'$.

a) $\chi = \alpha + \beta$ b) $\delta = \beta - \alpha$ c) $\rho = 3.\alpha$ d) $\pi = \frac{\beta}{4}$ e) $\varepsilon = 2.\alpha + \beta - \pi$

Výsledky souhrnných cvičení:

7) a) konvexní; b) nekonvexní; c) konvexní; d) konvexní;
12) a) 2 580´ ; b) 930´ ; c) 1 041´ ; d) 196 320´´ ; e) 69 300´´ ; f) 810´ ;
g) $40\frac{1}{3}°$; h) $25\frac{1}{4}'$; i) 213´ ; j) 5°50´ ; k) 360 660´´ ;
13) a) 175°5´ ; b) 68°38´ ; c) 801° ; d) 219° 55´ ; e) 61° 23´ ; f) 101°46´ ;
g) 15°24´ ; h) 142°54´48´´ ; i) 183°36´ j) 107°4´52´´ ; k) 72° ;
14) 11° ;**21)** 151°14´ ;**22)** 78°49´50´´ ;**23)** 40º; 140º; 140º;**24)** 60º; 60º; 120º; 120º;
25) 22,5° :**26)** 112,5° ;**27)** a) 45°; 135°; b) 60°; 120° ; c) 72° ; 108° ;
28) a) ano; b) ne; c) ano; d) ano; e) ano;
29) a) 42°; 138°; f) ano; g) ano; h) ano; i) ano;**32)** 21º;**33)** 42º;
34) a) ne; c) ne; d) ano; e) ano; f) ano; g) ano; h) ano; i) ano; j) ne;
k) ano; l) ne;
35) a) 51°27´ ; b) 110°23´ ; c) 162°29´ ; d) 42°25´ ; e) 174°43´; f) 187°23´ ;
g) 14°27´ ; h) 19°14´ ; i) 47°4´ ; j) 63°23´ ; k) 38°41´ ; m) 6°42´ ;
36) a) 1º 11´ 13´´ ; b) 25 924´´ ; c) 314,5´ ; d) 289º 45´ 30´´ ; e) 1º 4´ 56´´ ;
f) 34 032´´ ; g) 445,5´ ; h) 441º 21´30´´ ;
37) a) 105º; b) 157,5º ; c) 80º; d) 27,5º.